МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.958

Модель переноса радона (^{222}Rn) в режиме супердиффузии во фрактальной среде

Паровик Р.И., Шевцов Б.М., Фирстов П.П.
Представлено академиком АМАН А.М. Нахушевым

Введение. В работах [1, 2, 3] была предложена модель диффузионно-конвективного массопереноса радона в однородной пористой среде, которая стала классической. Эта модель нашла широкое распространение в различных модификациях и используется в настоящее время. Согласно этой модели на поверхности рыхлых отложений объёмная активность радона (ОА Rn) может указывать на наличие тел с повышенным содержанием материнского элемента Ra на глубинах несколько десятков метров. Столь низкая миграционная способность Rn обусловлена сравнительно коротким периодом полураспада (3.82 суток) и высоким атомным весом (222). Однако с помощью эманационной съемки в некоторых случаях локализуются радийсодержащие тела, находящиеся на глубинах до 500 м. В настоящее время развивается теория «геогаза» [4], суть которой сводится к тому, что во влагонасыщенных трещиноватых породах по трещинам, заполненным флюидом, поднимаются микропузырки глубинного газа (геогаза), что значительно увеличивает скорость его миграции к дневной поверхности. Однако, как в рамках классической диффузионно-конвективной модели, так и с помощью теории «геогаза», трудно объяснить высокую миграционную способность Rn в рыхлых отложениях.

В ряде работ показано, что геологическая среда обладает фрактальными свойствами [5]. В этом случае миграция радона за счет "аномальной"диффузии должна протекать гораздо интенсивнее.

Транспортные свойства случайно-неоднородных сред в рамках фрактального представления изучаются теорией перколяции [5]. В работе [6] показано, что кратковременные аномалии в гидрогеохимических полях, которые рассматриваются как предвестники сильных землетрясений, могут быть обусловлены эффектами перколяции. Сущность этих эффектов состоит в том, что среду, где происходит перенос, рассматривают как перколяционный кластер, т.е. систему узлов (поры) и связей между ними. Свойства узлов и связей тесно связаны с фрактальной размерностью, которая характеризует «сложность» рассматриваемой среды, причем распределение пор и связей подчиняется степенному закону с дробным показателем и, как правило, обладает самоподобной структурой [7]. В классической теории эманационного метода концентрация радона при миграции к поверхности спадает по экспоненте [1]. Если среда обладает фрактальными свойствами, которые характеризуют процесс аномальной диффузии, то концентрация Rn при миграции к земной поверхности должна уменьшаться по степенному закону.

Различают два вида аномальной диффузии: субдиффузия – накопление (прилипание или ловушки) в узлах, которая позволяет учитывать эффекты памяти [8] и связана с временной координатой; супердиффузия – обусловленная учетом пространственной корреляции между узлами по связям (полеты Леви) и связана с пространственной координатой [9, 10, 11]. Для супердиффузии показатель дробности $1<\alpha<2$, для «нормальной» диффузии $\alpha=2$. Субдиффузия происходит, когда показатель дробности $0<\alpha<1$ и характеризует процесс, связанный с «дефективными» (слабопроницаемыми) узлами на перколяционном кластере, а наиболее интенсивная супердиффузия связана с эффективными узлами и связями между ними.

В работе рассматривается модель массопереноса Rn в режиме супердиффузии во фрактальной среде (рыхлые отложения), которая дает возможность объяснить некоторые предвестниковые аномалии Rn перед сильными землетрясениями района Южной Камчатки.

Модель переноса радона во фрактальной пористой среде. Перенос радона в однородной пористой среде без фрактальных свойств описывается уравнением обычной диффузии и адвекции [1]:

$$\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial t}=D\frac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial x^2}+v\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x}-\lambda u\left(x,t\right)+Q/\eta, \tag{1}$$

D – коэффициент диффузии радона в грунте, м/с^2; Q – объемный источник радона, численно равный концентрации радона, образующегося в единицу времени в единице объема пористой среды на заданной глубине, Бк/м^{3}с; v – скорость адвекции в порах, м/с; $u(x)$ – поровая активность радона в единицу объема порового пространства, Бк/м^3; η – пористость среды, $0<\eta<1$; λ – постоянная распада радона, с$^{-1}$. Соотношение (1) следует из уравнения неразрывности:

$$\frac{\eta\partial u\left(x,t\right)}{\partial t}+\frac{\partial q\left(x,t\right)}{\partial x}=-\lambda\eta u\left(x,t\right)+Q, \tag{2}$$

и закона Фика:

$$q\left(x,t\right)=-D\eta\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x}+v\eta u\left(x,t\right). \tag{3}$$

Скорость адвекции в порах представима в виде: $v=\bar{v}+\delta v$, где первое слагаемое – среднее значение скорости, а второе – ее флуктуации. В случае отсутствия регулярной адвекции, которая обычно связана с эффузией или конвекцией, $\bar{v}=0$. В случае стохастической адвекции усреднение по случайному полю скоростей δv приводит к диффузионному уравнению (1) для средней концентрации радона, но с другим коэффициентом D, который зависит от интенсивности флуктуаций скорости δv [11, 12]. Эффекты, связанные с перечисленными типами адвекции, рассматриваться не будут.

Для простоты рассмотрим сначала стационарное решение классической диффузионной модели переноса Rn, а потом получим аналитические решения в случае среды, обладающей фрактальной структурой.

Согласно классической диффузионной модели перенос Rn из однородной пористой среды к земной поверхности осуществляется за счет диффузии по координатной полуоси ($0<x<\infty$) [1, 2]. Тогда такой процесс может быть описан обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$Du_{xx}\left(x\right)-\lambda u\left(x\right)+Q/\eta=0, \tag{4}$$

с краевыми условиями:

$$u\left(0\right)=0, u\left(\infty\right)=Q/(\lambda\eta). \tag{5}$$

Первое краевоее условие (5) может быть обусловлено большим значением коэффициента турбулентной диффузии в атмосфере, которое способствует быстрому выносу концентрации Rn с поверхности земли. Общее решение (4) можно записать [1]:

$$u(x)=Ae^{-\sqrt{\lambda/D}x}+Be^{\sqrt{\lambda/D}x}+Q/(\lambda\eta). \tag{6}$$

С учетом условия (5), определяя константы интегрирования A, B в (6), получим:

$$u(x)=(Q/\lambda\eta)\left[1-e^{-\sqrt{\lambda/D}x}\right]. \tag{7}$$

Согласно решению (7) концентрация радона будет спадать, начиная с глубин 10-15 м, по экспоненте по направлению к земной поверхности.

Если среда, в которой происходит перенос радона, обладает фрактальными свойствами, то тогда обобщенный закон Фика будет выглядеть следующим образом [10]:

$$q\left(x,t\right)=-D\frac{\partial^{\alpha-1}u\left(x,t\right)}{\partial x^{\alpha-1}}, \tag{8}$$

где показатель дробности производной α, зависящий от хаусдорфовой размерности фрактала, меняется в пределах $1 < \alpha < 2$. Интервал соответствует аномальной диффузии – супердиффузии, $\alpha = 1$ – обычному переносу, $\alpha = 2$ – обычной диффузии. Надо отметить, что соотношение (8) может иметь и другую форму записи, учитывающую асимметрию производной относительно точки x, см., например, [12, 13, 14]. Это обобщение рассматриваться не будет.

При учете нелокальных эффектов по времени выражение (8) имеет более сложный вид [10]:

$$q(x,t) = -D\frac{\partial^{1-\beta}}{\partial t^{1-\beta}}\frac{\partial^{\alpha-1}u(x,t)}{\partial x^{\alpha-1}},$$

где β – показатель дробности производной по времени, меняется в пределах $0 < \beta < 1$. Нелокальность по времени зависимости $q(x,t)$ от $u(x,t)$ связывают с прилипанием диффундирующих атомов к стенкам пор. Эти эффекты здесь также рассматриваться не будут. С учетом (2) и (8) уравнение диффузии радона во фрактальной среде можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^{\alpha}u(x,t)}{\partial x^{\alpha}} - \lambda u(x,t) + Q/\eta. \tag{9}$$

При $\alpha = 2$ осуществляется переход к уравнению обычной диффузии (1). Ниже будем рассматривать стационарный процесс стока радона из грунта в приземный слой атмосферы, полагая в (5) $\partial u(x,t)/\partial t = 0$.

Рассмотрим теперь перенос радона во фрактальной пористой среде. В этом случае задача (1,2) запишется так:

$$DD_{0x}^{\alpha}u(x) - \lambda u(x) + Q/\eta = 0, 1 < \alpha < 2 \tag{10}$$

с начальными нелокальными условиями:

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1}u(x) = A, \lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-2}u(x) = B \tag{11}$$

и краевыми условиями (5). Здесь дифференциальный оператор D_{0x}^{α} действует по правилу: $D_{0x}^{\alpha}u(x) = \dfrac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\dfrac{d^2}{dx^2}\displaystyle\int_0^x \dfrac{u(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{\alpha-1}}, 1 < \alpha < 2$ и называется оператором в смысле Римана-Лиувилля [15].

Уравнение (5) имеет общее решение вида [16, 17]:

$$u(x) = Ax^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^{\alpha}/D) + Bx^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(\lambda x^{\alpha}/D) + (Q/\lambda\eta)\left[1 - E_{\alpha,1}(\lambda x^{\alpha}/D)\right], \tag{12}$$

где $E_{\alpha,\beta}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k/\Gamma(\alpha k + \beta)$ – функция типа Миттаг-Леффлера [15]. Найдем константы интегрирования А и В из краевых условий (5). Из первого условия (5) вытекает, что В = 0. Действительно в этом можно убедиться, пользуясь свойством функции типа Миттаг-Леффлера: $E_{\alpha,\beta}(0) = 1/\Gamma(\beta)$. Вторая константа А находится с помощью формулы асимптотического разложения функции типа Миттаг-Леффлера для $\alpha \in (0,2)$, x$\to\infty$ [18]:

$$E_{\alpha,\beta}(x) = x^{(1-\beta)/\alpha}\exp(z^{1/\alpha})/\alpha - \sum_{k=0}^{n} x^{-k}/\Gamma(\beta - \alpha k) + O\left(1/|x|^{n+1}\right). \tag{13}$$

Применяя формулу (13) к выражению:
$u(x) = Ax^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(x^{\alpha}\lambda/D) + Q/(\lambda\eta)\left[1 - E_{\alpha,1}(x^{\alpha}\lambda/D)\right]$ и учитывая второе условие (5), получим, что $A = Q(\lambda/D)^{1-1/\alpha}/(\lambda\eta)$.

Таким образом, искомое решение задачи (5,10,11) запишется в виде:

$$u(x) = (Q/\lambda\eta)\left[1 + (\lambda/D)^{1-1/\alpha}x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(x^{\alpha}\lambda/D) - E_{\alpha,1}(x^{\alpha}\lambda/D)\right]. \tag{14}$$

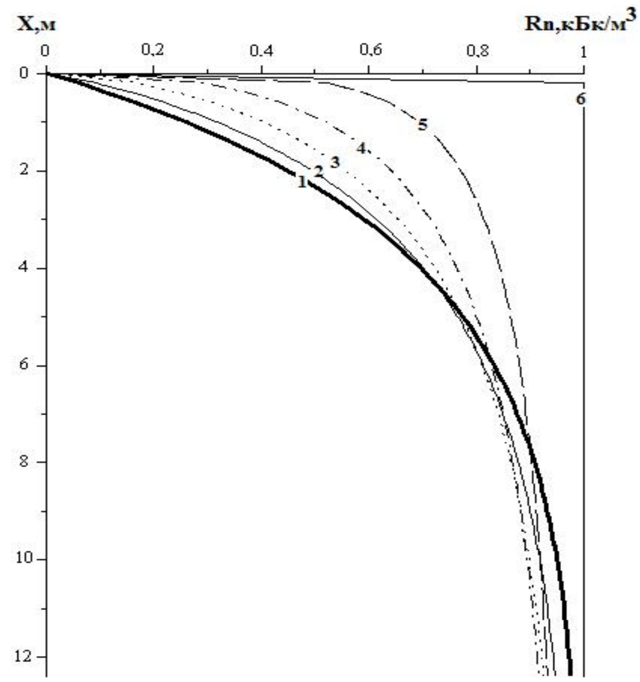

Рис. 1. Кривые распределения концентрации $u(x)$ = Rn в верхнем слое фрактальной среды в зависимости от параметра α при принятом значении $N_\infty = 1$ кБк/м^3:1 – $\alpha = 2$; 2 – $\alpha = 1.8$; 3 – $\alpha = 1.6$; 4 – $\alpha = 1.4$; 5 – $\alpha = 1.2$; 6 – $\alpha = 1$.

В предельном случае при $\alpha = 2$ с учетом соотношений: $E_{2,1}\left(x^2\lambda/D\right) = ch\left(x\sqrt{\lambda/D}\right)$ и $E_{2,2}\left(x^2\lambda/D\right) = sh\left(x\sqrt{\lambda/D}\right)/(x\sqrt{\lambda/D})$, решение (14) можно записать так:

$$u(x) = (Q/\lambda\eta)\left[1 + sh\left(x\sqrt{\lambda/D}\right) - ch\left(x\sqrt{\lambda/D}\right)\right] = (Q/\lambda\eta)\left[1 - e^{-x\sqrt{\lambda/D}}\right]. \qquad (15)$$

которое полностью совпадает с классическим решением (7), а решение (14) описывает перенос радона в пористой среде с фрактальными свойствами, который происходит в режиме супердиффузии ($1<\alpha<2$). Этот режим характерен для пористых сред и является промежуточным между классическим диффузионным переносом (α=2) и конвективным переносом (α=1), который наблюдается в трещинах. В какой-то мере режим супердиффузии можно считать аналогом фазового перехода, когда при переходе через некоторое критическое значение пористости или связанной с ней фрактальной размерности, происходит смена режимов и соответственно типов уравнений, описывающих их.

В литературных источниках [9, 10, 11, 13] режим супердиффузии рассматривается в основном при $1<\alpha<2$ однако возможен и более широкий диапазон изменения параметра α. Например, интересен случай, когда $0<\alpha<1$, который заслуживает отдельного исследования. В этом случае происходит рост интенсивности процесса переноса радона по сравнению с обычной адвекцией (α=1). Такие процессы происходят в "активных" средах, т.е. в средах, которые активно генерируют радон в результате своего разрушения.

На рис.1 приведено семейство кривых распределения концентрации Rn в верхнем слое фрактальной среды в зависимости от параметра α при принятом значении $N_\infty = 1$ кБк/м^3, на котором видно, что при $1<\alpha<2$ за счет аномальной диффузии сток радона в атмосферу значительно увеличивается по сравнению с нормальной диффузией. Кривые распредления концентрации радона в этом случае имееют в наличии так называемые "тяжелые хвосты", которые характеризуют режим супердиффузии (полеты Леви).

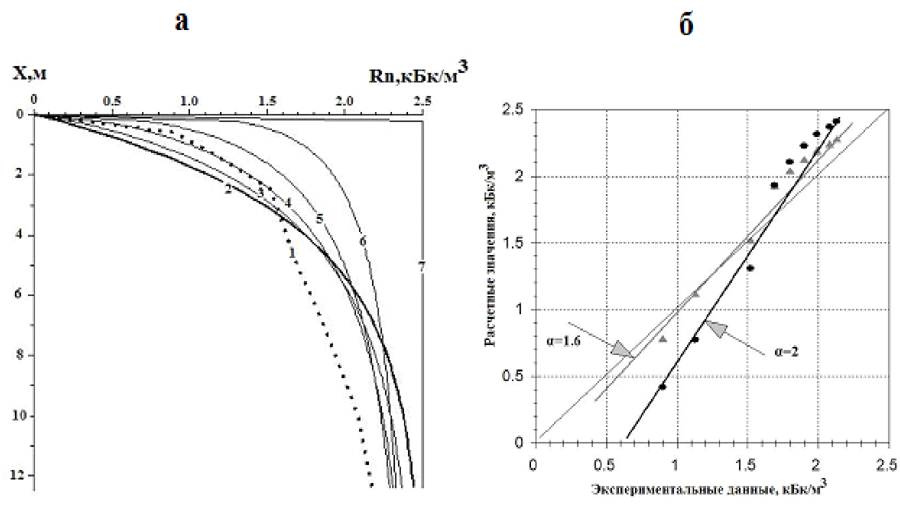

Рис. 2. Кривая распределения концентрации радона на глубине (кривая 1), проведенная через экспериментальные точки работы [18] и семейство расчетных кривых концентрации $u(x)$ = Rn во фрактальной среде с $N_\infty = 2.5$ кБк/м^3 в зависимости от параметра α (а). Корреляционное поле между значениями ОА Rn экспериментальной кривой и значениями расчетных кривых с $\alpha = 2$ и $\alpha = 1.6$ (б): 1 – экспериментальные данные; 2 – $\alpha = 2$; 3 – $\alpha = 1.8$; 4 – $\alpha = 1.6$; 5 – $\alpha = 1.4$; 6 – $\alpha = 1.2$; 7 – $\alpha = 1$.

Экспериментальные данные, подтверждающие возможность аномальной диффузии радона в рыхлых отложениях В результате изменений регионального поля напряжений в зоне субдукции возникают деформационные процессы, влияющие на характеристики геосреды. Так, в работе [19] показано, что перед и во время сейсмической активизации северного фланга Курило-Камчатской островной дуги 17-30 августа 2006 г. наблюдалось уменьшение коэффициента проницаемости верхней части рыхлых отложений в районе пункта регистрации более чем в 4 раза ($6{\cdot}10^{-14}$- $2.7{\cdot}10^{-13}$м^2) с одновременном увеличением плотности потока Rn с поверхности (ППР) почти в два раза. Данный факт можно объяснить только тем, что скорость переноса Rn увеличилась, что привело к возрастанию ППР. По-видимому, перестройка регионального поля напряжений привела к изменению деформаций сжатия, что, с одной стороны, уменьшило коэффициент проницаемости, а с другой привело к перестройке структуры пористой среды, обеспечив "протечку".

В работе [20] приведены экспериментальные данные по регистрации Rn на глубинах 0.8, 5.5, 9 и 11.5 м, которые приведены на рис. 2 (кривая 1). Форма кривой объясняется тем, что, возможно, имеется распределенный источник (наличие источников Rn в среде на пути миграции), или существует нелинейная диффузия, когда D является функцией концентрации, с конвективной составляющей - фильтрационное течение. В работе [20] отдается предпочтение второму объяснению, но с определенной долей условности можно предположить наличие распределенного источника и рассмотреть кривую изменения ОА Rn с глубиной согласно рассмотренной модели. Было рассчитано семейство кривых с различным коэффициентом α уравнения (9) и значением $N_\infty = 2.5$ кБк/м^3, близким к значению N_∞ для экспериментальных данных. Как видно на рис. 2а, кривая, проведенная через экспериментальные точки, заключена между кривыми с параметром α=1.5-2. Наилучшее совпадение экспериментальной кривой с расчетной наблюдается при $\alpha = 1.6$. На рис. 2б, приведено корреляционное поле между значениями ОА Rn экспериментальной кривой и значениями расчетных кривых с $\alpha = 2$ и $\alpha = 1.6$ (б). На рисунке видно, что экспериментальная кривая ближе к кривой со значением $\alpha = 1.6$, по сравнению с кривой для нормальной диффузии $\alpha = 2$, что указывает, на правомерность наших предположений о возможной фрактальности рыхлых отложений.

Заключение.

1. Рассмотрена модель массопереноса радона в пористой среде с фрактальными свойствами. Показано, что возникновение супердиффузии может приводить к увеличению стока Rn в атмосферу и служить индикатором перестройки регионального поля напряжений.
2. Приведенные данные указывает на то, что явление супердиффузии для массопереноса Rn в рыхлых отложениях имеет место в реальных условиях. С целью получения более достоверных экспериментальных данных необходимо организовать регистрацию концентрации Rn в нескольких точках в интервале глубин 0.1 -10 м.

Авторы выражают признательность А. В. Псху за ценные замечания и советы, которые способствовали лучшему осмыслению результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новиков Г.Ф., Капков Ю.Н.* Радиоактивные методы разведки. – М.: Недра, 1965. – 750 с.
2. *Граммаков А.Г., Никонов А.И., Тарфеев Г.П.* Радиометрическаие методы поисков и разведки урановых руд. – М.: Госгеолтехиздат, 1957. – 610 с.
3. *Булашевич Ю.П, Хайретдинов Р.К.* К теории диффузии эманации в пористых средах // Известия АН СССР, серия геофизическая. – 1959. – № 12. – С. 1787-1792.
4. *Etiope G., Martinelli G.* . Migration of carrier and trace gases in the geosphere: an overview // Physics of the earth and planetary interiors. 2002. V. 129, № 3-4. – P. 185-204.
5. *Тарасевич Ю.Ю.* Перколяция: теория, приложения, алгоритмы. – М: Едиториал УРСС, 2002. – 112 с.
6. *Рябинин Г.В.* Гидрогеохимические предвестники землетрясений в высокосейсмичном регионе (на примере юго-восточной части полуострова Камчатка): Автореф. дисс. ... канд. геолого-минералогических наук. – М.: ИФЗ РАН, 2007. 21 с.
7. *Потапов А.А.* Фракталы в радиофизике и радиолокации. Топология выборки. – М.: Университетская книга, 2005. – 848 с.
8. *Сербина Л.И.* Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах. – М: Наука, 2007. – 167 с.
9. *Metzler R.,Klafter J.* The random walk‘s guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach//Physics Reports. – 2000. – V. 339. – P. 1-77.
10. *Учайкин В.В.* Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы // Успехи физических наук. – 2003. – Т. 173, № 8. – С. 847-876.
11. *Уткин С.Г.* Статистика и кинематика аномально-диффузионных процессов. Дисс... канд. физико-математических наук. Нижний Новгород: НГУ, 2005. – 127 с.
12. *Кляцкин В.И.* Диффузия и кластеризация пассивной примеси в случайных гидродинамических потоках. – М.: Физматлит, 2005. – 160 с.
13. *Большов Л.А., Дыхне А.М., Кондратенко Т.С.* Аномальная диффузия и флуктуационные эффекты в сильно неупорядоченных средах// Письма в ЖЭТФ, 2002. Т. 75, вып. 5/6. С. 291-293.
14. *Zaslavsky G.M.* Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport // Physics Reports. – 2002. – V. 371. – P. 461-580.
15. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.
16. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
17. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
18. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966. – 672 с.
19. *Фирстов П.П. , Пономарев Е.А., Чернева Н.В., Бузевич А.В., Малышева О.П.* К вопросу влияния бdevariаций на поступления радона в атмосферу // Вулканология и сейсмология. – 2007. – № 6. – С. 46-53.
20. *Спивак А.А., Сухоруков М.В., Харламов В.А.* Особенности эманации радона ^{222}Rn с глубиной // Доклады РАН. – 2008. – Т. 420, № 6. – С. 825-828.

ABSTRACT

The model for massa transfer of radon in porous fractional medium is offered, its analytical decisions are received. Comparison of settlement curves to experimental data is spent. Legitimacy of the assumption that radon carrying over to a ground can be carried out in a mode of anomalous diffusion (superdiffusions) is shown.

Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, e-mail: `romano84@mail.ru`

Institute of Volcanology and Seismology Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences,
e-mail: `firstov@kscnet.ru`

АННОТАЦИЯ

Предложена модель переноса радона в пористой фрактальной среде, получены ее аналитические решения. Проведено сопоставление расчетных кривых с экспериментальными данными. Показана правомерность предположения о том, что перенос радона в грунте может осуществляться в режиме аномальной диффузии (супердиффузии).

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,
e-mail: `romano84@mail.ru`

Институт вулканологии и сейсмологии ДВО РАН,
e-mail: `firstov@kscnet.ru`